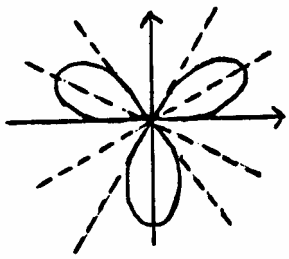
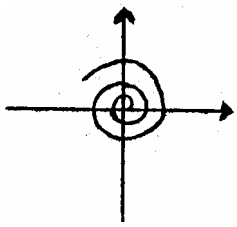
单元 B7：解析几何

特定目标：

1. 学习除直角坐标外的另一种坐标系：极坐标。
2. 学习二次曲线。
3. 利用代数方法，学习解决轨迹问题。
4. 解决有关问题。

内容	时间分配	教学建议
7.1 基本解析几何知识	5	学生除了对中学数学解析几何内容有所认识外，学习此单元的其它课题应先掌握下列知识： (1) 外分点； (2) 直线图形的面积 $\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$； (3) 求两直线的交角时所用公式 $\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$； (4) 直线的法线式； (5) 两直线之间的角平分线； (6) 直线族及 (7) 圆族。 学生应懂得极坐标系及直角坐标系之间的转换，并应掌握曲线方程在两个坐标系之间的转换方法。 由极坐标转为直角坐标：$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

内容	时间分配	教学建议
		由直角坐标转为极坐标：$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\frac{y}{x}\text{，其中 } x\neq 0 \end{cases}$，并且 θ 是由 (x,y) 所在的象限决定。
7.2 于极坐标系的曲线描绘	4	学生应懂得极坐标曲线方程的绘图，因为在「积分的应用」一课中需要对这种绘图法有基础认识，以下是一些学生应懂得绘画的简易极形式曲线方程： (1) 直线： $\theta = k$，其中 k 为一正常数； $r\cos\theta = a$ (垂直于 x – 轴的直线) (2) 圆： $r = k$，其中 k 为一正常数； $r = \sin\theta$ (3) 抛物线： $r = (1+\cos\theta) = k$，其中 k 为一常数 (4) 心脏线： $r = a(1-\cos\theta)$，其中 a 为一常数 (5) 玫瑰曲线： $r = a\sin 3\theta$ 

内容	时间分配	教学建议
7.3 于直角坐标系的圆锥曲线	7	(6) 螺线： $r = \theta$  学生应可以分别各圆锥曲线的标准方程，包括： $y^2 = 4ax$ (抛物线) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (椭圆) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (双曲线) $xy = c^2$ (等轴双曲线) 其参数表达形式亦应加以学习，包括： $y = r\sin\theta$； $x = r\cos\theta$ (椭圆) $y = b\sin\theta$； $x = a\cos\theta$ (椭圆) $y = b\tan\theta$； $x = a\sec\theta$ (双曲线) $y = \frac{c}{t}$； $x = ct$ (等轴双曲线) $y = 2at$； $x = at^2$ (抛物线) 对双曲线的渐近线亦需要有所认识，而对圆锥曲线的其它性质例如离心率、焦点及准线等亦可教授但不需特别强调。

内容	时间分配	教学建议
7.4 圆锥曲线的切线及法线	6	学生应懂得运用不同方法去找出圆的切线。经过简单圆形 $x^2 + y^2 = a^2$ 上一点 (x_1, y_1) 的切线方程为 $x_1x + y_1y = a^2$，其法线方程则为 $x_1y - y_1x = 0$。这些基本结果的导数亦可在此介绍以启发学生思考及计算如以下的例子以强调其基础方法： 计算经过圆形 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ 上一点(x_1, y_1) 的切线方程， (i) 可利用切线与圆形半径的垂直关系； (ii) 设切线方程为 $y = mx+k$，利用联立方程 $\begin{cases} y = mx + k \\ x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \end{cases}$ 有等根的关系。 并应注意到方法(ii)是可以应用于一点 (x_1, y_1) 不在圆形的情况上。在此可以得到经过圆形 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ 上一点 (x_1, y_1) 的切线方程为 $x_1x + y_1y + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$。若将其结果普及，应可得到下列结果： (a) 经过抛物线 $y^2 = 4ax$ 上一点(x_1, y_1)的切线方程为 $y_1y = 2a(x + x_1)$ (b) 经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点(x_1, y_1)的切线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ (c) 经过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 上一点(x_1, y_1)的切线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$ (d) 经过等轴双曲线 $xy = c^2$ 上一点(x_1, y_1)的切线方程为 $y_1x + x_1y = 2c^2$ 在找到切线方程后，学生应对法线方程问题上不会有任何困难的。 当二次曲线方程是以参数式表达时，其有关的结果亦应考虑。教师应引导学生找出下列结果： (a) 抛物线 $\begin{cases} x = at^2 \\ y = 2at \end{cases}$ 的切线方程为 $y = \frac{x}{t} + at$ (b) 椭圆 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 的切线方程为 $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ (c) 双曲线 $\begin{cases} x = a\sec\theta \\ y = b\tan\theta \end{cases}$ 的切线方程为 $\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1$

内容	时间分配	教学建议
		(d) 等轴双曲线 $\begin{cases} x = ct \\ y = \dfrac{c}{t} \end{cases}$ 的切线方程为 $x + t^2 y = 2ct$。 为了使到学生能理解基本概念，并能掌握和运用所学技巧，切点弦的基本概念亦应予以讨论。
7.5 于直角坐标系的轨迹问题	5	学生应对一组能够符合一系列的限制条件而又能利用直角坐标方程来表达的点的轨迹方程加以学习，例如： (1) 当一点与一固定点的距离不变，其移动的轨迹为一圆形。 (2) 当一点与一固定点及一固定直线之间的距离相等，其移动的轨迹为一抛物线。 (3) 当圆形在一直在线滚动时，圆周上一点的轨迹为旋轮线。
7.6 平面曲线的切线及法线	4	当学习了微分学后，学生应可应用微分法去计算平面曲线在直角坐标系上的切线和法线方程。利用微分公式及链式法则，学生应可找出以隐函数式或参数式定义的曲线的切线和法线方程。教师应当在这课题上作出适当安排，因应学生的能力，将这个单元作为微分学的深入应用前的引例，或作为基本微分学应用的延续。
	31	