# 单元 A8：矩阵

**特定目标：**

1. 学习矩阵的概念及运算。
2. 学习二阶方阵及三阶方阵的性质和运算及其行列式。
3. 矩阵在二维几何上的应用。

| 内容 | 时间分配 | 教学建议 |
|---|---|---|
| **8.1 矩阵及其运算** | 4 | 教师应介绍一个有 m 行和 n 列矩阵的通式，即 $m \times n$ 矩阵。学生应清楚矩阵的运算：加法、减法、乘法和纯量乘法及其性质。一般来说，对于矩阵 A 和 B，AB≠BA，教师应予以解释。教师应介绍以下各名词：零矩阵、单位矩阵和倒置矩阵。 |
| **8.2 二阶及三阶方阵** | 9 | 教师应定义方阵和其行列式，并清楚指出奇异矩阵和非奇异矩阵的概念及应用。学生应能计算矩阵的行列式和求出非奇异矩阵的逆矩阵，并知道下列有关逆矩阵和行列式的性质：<br>A. 逆矩阵的性质<br>(i) 一矩阵的逆矩阵是唯一的。<br>(ii) 一矩阵存在逆矩阵当且仅当它是非奇异。<br>(iii) 若 A 为非奇异，则 AB =0 蕴涵 B = 0。<br>(iv) 若 A 为非奇异，则 AB = AC 蕴涵 B = C。<br>(v) 若 A、B 为非奇异，λ为非零纯量及 n 为正整数，<br>则 AB、$A^{-1}$、$A^t$、λA、$A^n$ 为非奇异及<br>$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$，<br>$(A^{-1})^{-1} = A$，<br>$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$，<br>$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$，<br>$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$。<br><br>B. 行列式的性质<br>(i) 若一行列式中有两行（或两列）全等或成比例，则此行列式的值是零。<br>(ii) 若一行列式中有两行（或两列）互换，则此行列式的数值不变但符号改变。 |



| 内容 | 时间分配 | 教学建议 |
|---|---|---|
| | | (iii) 若一行列式的行换作列（或列换作行），则其值不变，即是 $\det A^t = \det A$ 或 $\lvert A^t \rvert = \lvert A \rvert$。<br>(iv) 若将一行列式中任何一行（或列）的每一分子乘以同一数，则其值亦乘以此一数。<br>(v) 两同阶方阵乘积的行列式等于该两方阵行列式的乘积，即是<br>$\det AB = \det A \cdot \det B$ 或 $\lvert AB \rvert = \lvert A \rvert \lvert B \rvert$。 |
| **8.3 于二维几何的应用** | 8 | 学生应熟悉以矩阵表示一点和一向量；及反射、旋转、放大、位移、平移及其合成的矩阵表示法。下列各例为部分以 $2 \times 2$ 矩阵表示的变换：<br>(i) 对直线 $y = (\tan\theta)x$ 的反射，以矩阵<br>$A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ 表示。<br>(ii) 绕原点旋转 $\phi$ 角，以矩阵<br>$B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ 表示。<br>(iii) 对原点以比例因子 k≠ 0 放大，以矩阵<br>$C = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 表示。<br>(iv) 以因子 k 平行于 x 一轴位移，以矩阵<br>$D = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 表示。<br><br>对于 (iii) 及 (iv)，应讨论对形状和面积的影响。教师应对学生解释清楚在上述各种变换下， 所有满足 $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$，其中 T 代表一种变换，的每一点 P(x， y)都会转到一新点 P′(x′，y′)。熟习各变换的合成对学生明白矩阵乘积很重要。 |

| 内容 | 时间分配 | 教学建议 |
| --- | --- | --- |
| | | *例*：<br>先对直线 y = (tan$\theta$)x 反射跟着绕原点旋转$\phi$角的结果，正如上文所提及，可以乘积 BA 表示，其中 $BA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$。留意此乘积是由右至左解释为：先应用变换 A 再应用变换 B。<br>如下的合成变换亦可提出：<br>*例*：<br>以方程组 $\begin{cases} x'=y+2 \\ y'=-x+4 \end{cases}$，其矩阵表示法为<br>$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$的变换。<br>矩阵$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$代表变换是对原点顺时针方向旋转 90°。因此，它可视为一旋转再跟着平移。若以（3，1）为定点，此变换可视作为对（3，1）顺时针方向旋转 90°。 |
| | 21 | |